JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series A 69, 17–35 (1995)

Sur une généralisation des séries indicatrices d'espèces*

GILBERT LABELLE, JACQUES LABELLE, ET KATHLEEN PINEAU

Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec, Canada H3C 3P8

Communicated by Gian-Carlo Rota

Received September 3, 1992

Le but de ce travail est de présenter un contexte de la combinatoire algébrique généralisant à la fois les notions de séries indicatrices de cycles, $Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, et d'asymétrie, $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, d'une espèce F. Nous utilisons l'inversion de Möbius dans des treillis de sous-groupes (telle qu'initiée par Rota [*Z. Wahrsh. Verw. Gebiete* **2** (1964), 340–348; *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 330–334], suivi de Stockmeyer [Ph.D. Thesis, University of Michigan], White [*Proc. Amer. Math. Soc.* **47**(1) (1975), 41–44], Rota et Smith ["Enumeration under Group Action," 1977], Rota et Sagan [*European J. Combin.* **1** (1980), 67–76] et Kerber ["Enumeration under Finite Group Action: Symmetry Classes of Mappings," 1985]) pour effectuer le dénombrement des structures d'une espèce F selon leurs types de symétries; ces derniers étant codés par une deuxième espèce G. Ainsi, pour toutes espèces G et F on définit la *G-série indicatrice de F*, notée $G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, qui se réduit aux séries $Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ et $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ par des choix judicieux de l'espèce G.

1. INTRODUCTION

La notion de série indicatrice d'asymétrie $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ d'une espèce de structures F (voir [4, 7, 9, 20]) a été introduite dans [5] (voir aussi [19]) comme outil de dénombrement des F-structures asymétriques. La série $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ possède des propriétés analogues à celles de la série indicatrice de cycles $Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de Pólya–Joyal [4]. Une définition uniforme pour ces deux séries est proposée dans [6].

On introduit d'abord l'espèce pondérée $X_t = X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \cdots$ dont les structures sont les singletons de poids t_i, $i \geq 1$. On considère ensuite l'espèce auxiliaire $F_t = F_t(X) = F(X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3} + \cdots)$ où une F_t-structure est une F-structure dont chaque point de l'ensemble sous-jacent est muni d'un poids choisi arbitrairement dans l'ensemble $\{t_i | i \geq 1\}$; en fait, $F_t = F \times E_t$ où E désigne l'espèce des ensembles. Ceci permet de définir simultanément les séries indicatrices de cycles Z_F ([6], voir aussi [3]

*Travail fait dans le cadre de subventions CRSNG (Canada) et FCAR (Québec).

0097-3165/95 $6.00

p. 29) et d'asymétrie Γ_F d'une espèce quelconque F comme les expressions des fonctions symétriques en les variables t_i, $i \geq 1$, de $\widetilde{F_t}(x)|_{x:=1}$ et de $\overline{F_t}(x)|_{x:=1}$ dans la base des *sommes de puissances* (power sums). En d'autres mots,

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)|_{x_i := \Sigma_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{s \in \widetilde{F_t}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots, \tag{1}$$

$$\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)|_{x_i := \Sigma_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{s \in \overline{F_t}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots, \tag{2}$$

où $n_i(s)$ désigne le nombre d'occurrences du poids t_i dans s, $\widetilde{F_t}$ et $\overline{F_t}$ désignent respectivement les types et les types d'asymétrie de F_t-structures.

Pour tout ensemble fini U, le groupe des permutations de U, noté $\mathfrak{S}_U$, agit par transport de structures sue l'ensemble $F[U]$ des F-structures sur U:

$$\begin{gathered} \mathfrak{S}_U \times F[U] \to F[U] \\ (\sigma, s) \mapsto \sigma \cdot s = F[\sigma](s). \end{gathered} \tag{3}$$

En général $\sigma \cdot s$ est obtenue de s en remplaçant chaque élément u de l'ensemble sous-jacent par l'élément correspondant $\sigma(u)$.

Une F-structure s sur U est dite *asymétrique* lorsque son stabilisateur (i.e.: son groupe d'automorphismes) sous l'action (3) est trivial, c'est-à-dire,

$$\operatorname{stab}(s) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_U | \sigma \cdot s = s\} = \{id\}.$$

Afin d'uniformiser la notation, nous utiliserons $\widetilde{F_t}$ pour désigner les types de F_t-structures et imposerons les restrictions appropriées au contexte. Ainsi, la série indicatrice d'asymétrie (2) d'une espèce F s'écrit

$$\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)|_{x_i := \Sigma_{k \geq 1} t_k^i} = \sum_{\substack{s \underline{\in} \widetilde{F_t} \\ \operatorname{stab}(s) = \{id\}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots, \tag{4}$$

où $s \underline{\in} \widetilde{F_t}$ indique que s parcourt un système de représentants des types de F_t-structures et stab(s) est le stabilisateur de la F_t-structure s.

Comme la série des types d'asymétrie fait appel aux structures dont le stabilisateur est trivial et que la série des types n'impose aucune restriction sur le stabilisateur d'une structure, il est naturel de chercher à définir une série indicatrice pour tout groupe d'automorphismes donné. C'est ce que nous ferons dans la section suivante en adaptant des résultats dus à Stockmeyer [17] au contexte des espèces de structures.

2. G-SÉRIE INDICATRICE

Une espèce $M \neq 0$ est dite *moléculaire* (voir [8, 9, 20]) lorsqu'elle est indécomposable sous la somme d'espèces, i.e.: $M = P + Q \Rightarrow P = 0$ ou $Q = 0$. Dire que M est moléculaire signifie que pour tout ensemble fini U l'action (3) sur $M[U]$ est transitive.

Dans [9], Labelle et Yeh présentent la bijection Φ entre l'ensemble $\mathscr{M}_n$ des espèces moléculaires concentrées sur la cardinalité n et l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$. Cette bijection permet d'écrire toute espèce moléculaire $M \in \mathscr{M}_n$ comme le quotient X^n/H où H est un représentant de la classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, du stabilisateur d'une M-structure sur $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. En fait, l'espèce X^n/H est définie pour tout ensemble fini U de cardinalité n comme $(X^n/H)[U] = X^n[U]/H$ avec transport de structures habituel; une X^n/H-structure sur $[U]$ est une orbite de l'action de H sur $X^n[U]$.

Soit M et N deux espèces moléculaires. Nous utilisons ce que Kerber [11] appelle le lemme fondamental (dû à Stockmeyer [17] qui, en fait, est une version pondérée d'un résultat de Burnside—voir [10] pour des commentaires historiques) pour définir la N-série indicatrice de l'espèce M. Par la suite, munis de cette définition et du fait que toute espèce possède une décomposition moléculaire unique, nous définissons la G-série indicatrice de F pour tout couple (G, F) d'espèces de structures.

Soit $M = X^m/H$ et $N = X^n/K$ deux espèces moléculaires telles que $H \leq \mathfrak{S}_m$ et $K \leq \mathfrak{S}_n$. On s'intéresse à la somme des poids de tous les types de $M_t(X)$-structures dont le stabilisateur est conjugué au sous-groupe K, c'est-à-dire,

$$[N \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \ldots) = \begin{cases} 0 & si\ m \neq n \\ \displaystyle\sum_{\substack{s \in \widetilde{M_t} \\ \mathrm{stab}(s) \in \overline{K}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots & sinon, \end{cases} \tag{5}$$

où s parcourt un système de représentants des types de M_t-structures, $\overline{K}$ désigne la classe de conjugaison de K dans $\mathfrak{S}_n$ et $n_i(s)$, pour $i \geq 1$, désigne le nombre d'occurrences du poids t_i dans la structure s.

Considérons le cas où $M = X^n/H$ et $N = X^n/K$ sont deux espèces moléculaires concentrées sur une même cardinalité n. Une M_t-structure sur $[n]$ est un couple (m, f) où $m \in M[n]$ et $f\colon [n] \to \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ est une fonction qui permet d'associer à chacun des sommets i de m un poids $t_{f(i)}$. Ainsi,

$$M_t[n] = \{(m, f) \mid m \in M[n], f\colon [n] \to \mathbb{N}^*\}.$$

Fixons $m \in M[n]$ telle que $\text{stab}(m) = H$ et formons l'ensemble $\Omega = \Omega_m = \{(m,f) | f\colon [n] \to \mathbb{N}^*\}$. Considérons l'action de H sur Ω,

$$\begin{aligned} H \times \Omega &\to \Omega \\ (h,s) &\mapsto h \cdot s, \end{aligned} \tag{6}$$

où $h \cdot s$ est obtenue de $s = (m,f)$ en remplaçant chaque sommet i de m par l'élément correspondant $h(i)$. Puisque $H = \text{stab}(m) \leq \mathfrak{S}_n$, on vérifie facilement que l'action du groupe H sur Ω se résume à:

$$\begin{gathered} H \times \Omega \to \Omega \\ (h,(m,f) = s) \mapsto h \cdot s = h \cdot (m,f) = (m, f \circ h^{-1}), \end{gathered}$$

et que cette action préserve les poids. Puisque les types de M_t-structures s'identifient aux orbites de cette action (on oublie simplement la nature des sommets de l'ensemble sous-jacent), on peut écrire

$$[N \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \ldots) = \sum_{\substack{s \,\underline{\in}\, \widetilde{\Omega} \\ \text{stab}(s) \in \overline{K}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots,$$

où $s \,\underline{\in}\, \widetilde{\Omega}$ signifie que s parcourt un système de représentants des orbites de l'action (6), c'est-à-dire, un système de représentants des types de M_t-structures.

Lemme 1. *Soit $M = X^n/H$ et $N = X^n/K$ deux espèces moléculaires telles que $H, K \leq \mathfrak{S}_n$, alors*

$$\begin{aligned} &[N \downarrow M](t_1, t_2, \ldots) \\ &\quad = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q,V) \sum_{V \leq H_s} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} \ldots, \end{aligned}$$

où $\overline{K}$ est la classe de conjugaison de K dans $\mathfrak{S}_n$, $\text{sg}(H)$ est l'ensemble des sous-groupes de H, $\mu(Q,V)$ est la valeur de la fonction de Möbius de l'intervalle $[Q,V]$ dans le treillis des sous-groupes de H, s parcourt l'ensemble des représentants des types de M_t-structures et $H_s = \{h \in H | h \cdot s = s\}$.

Preuve. En posant $w(s) = t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots$ et en adaptant la démonstration du lemme apparaissant à la page 163 de [11] au contexte des espèces, on obtient

$$\sum_{\substack{s \,\underline{\in}\, \widetilde{M_t} \\ \text{stab}(s) \in \overline{Q}^H}} w(s) = \frac{|Q| |\overline{Q}^H|}{|H|} \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q,V) \sum_{V \leq H_s} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \ldots, \tag{7}$$

où $Q \in \overline{K} \cap \text{sg}(H)$ et $\overline{Q}^H$ désigne la classe de conjugaison de Q dans H.

Notons que la somme

$$\sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q,V) \sum_{V \leq H_s} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots$$

ne dépend que de la classe de conjugaison de Q dans H. De plus, l'ensemble $\overline{K} \cap \mathrm{sg}(H)$ se partitionne en k classes de conjugaison dans H:

$$\overline{K} \cap \mathrm{sg}(H) = \biguplus_{i=1}^{k} \overline{Q_i}^H.$$

Il suffit maintenant d'effectuer une somme sur les classes de conjugaison de sous-groupes de H qui sont contenus dans $\overline{K}$ pour obtenir le résultat énoncé. ▌

DÉFINITION 1. *Soit N une espèce moléculaire, la N-série indicatrice de l'espèce moléculaire M est définie par $N_M(x_1, x_2, x_3, \dots) = [N \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \dots)$ exprimée dans la base des sommes de puissances $x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i$.*

PROPOSITION 1. *Soit $M = X^n/H$ et $N = X^n/K$ deux espèces moléculaires telles que $H, K \leq \mathfrak{S}_n$, alors*

$$N_M(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \mathrm{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q,V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots$$

où V_i, pour $i \geq 1$, désigne le nombre d'orbites à i éléments de l'action naturelle de V sur $[n]$.

Preuve. En vertu du lemme 1 il suffit de démontrer que

$$x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots = \sum_{V \leq H_s} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots$$

lorsque s parcourt le système de représentants des types de M_t-structures. Puisque $V \leq H_s = \{h | h \in H, h \cdot s = s\}$, chaque orbite de l'action de V sur $[n]$ ne contient que des sommets de même poids d'où,

$$\begin{aligned}\sum_{V \leq H_s} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots &= \Big(\sum_{k \geq 1} t_k\Big)^{V_1} \Big(\sum_{k \geq 1} t_k^2\Big)^{V_2} \Big(\sum_{k \geq 1} t_k^3\Big)^{V_3} \dots \\ &= x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots \end{aligned}$$ ▌

Définition 2. Soit $G = \sum_{N \in \mathcal{M}} g_N N$ et $F = \sum_{M \in \mathcal{M}} f_M M$ deux espèces quelconques et leur décomposition moléculaire. La G-série indicatrice de F

est définie par

$$G_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{N, M \in \mathscr{M}} g_N f_M N_M(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

où $\mathscr{M}$ désigne l'ensemble de toutes les espèces moléculaires.

PROPOSITION 2. *Soit F_1, F_2, F, G_1, G_2 et G des espèces et $\alpha \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, alors*

(1) $(G_1 + G_2)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = (G_1)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) + (G_2)_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

(2) $G_{(F_1+F_2)}(x_1, x_2, x_3, \dots) = G_{F_1}(x_1, x_2, x_3, \dots) + G_{F_2}(x_1, x_2, x_3, \dots)$

(3) $(\alpha G)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha G_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$

(4) $G_{\alpha F}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha G_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve. La démonstration de cette proposition est facile et est laissée comme exercice au lecteur. ▌

On peut exprimer les espèces $G = \Sigma_{N \in \mathscr{M}} g_N N$ et $F = \Sigma_{M \in \mathscr{M}} f_M M$ de la façon suivante:

$$G = \sum_{n \geq 0} \sum_{K \underline{\in} \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)} g_{X^n/K}(X^n/K),$$

$$F = \sum_{n \geq 0} \sum_{H \underline{\in} \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)} f_{X^n/H}(X^n/H),$$

où $\underline{\in}\, \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)$ indique qu'on parcourt un ensemble de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$.

Puisque la G-série indicatrice d'une espèce F est indépendante du choix des représentants des classes de conjugaison considérées elle peut aussi s'exprimer sous la forme

$$G_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{H, K \underline{\in} \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)} g_{X^n/K} f_{X^n/H} (X^n/K)_{(X^n/H)}(x_1, x_2, \dots), \tag{8}$$

où,

$$(X^n/K)_{(X^n/H)}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \mathrm{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \cdots .$$

3. SÉRIE INDICATRICE D'ASYMÉTRIE

L'espèce des ordres linéaires possède la décomposition moléculaire $L = \Sigma_{n \geq 0} X^n$ où le stabilisateur de toute X^n-structure sur $[n]$ est formé uniquement de la permutation identité de $\mathfrak{S}_n$. Cette constatation mène naturellement à la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *Soit $F = \Sigma_{n \geq 0} \Sigma_{M \in \mathscr{M}_n} f_M M$ une espèce et $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ sa série indicatrice d'asymétrie, alors*

$$L_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Preuve. La L-série indicatrice de l'espèce F est

$$L_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{M \in \mathscr{M}_n} f_M (X^n)_M (x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

où $(X^n)_M(x_1, x_2, x_3, \ldots) = [X^n \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \ldots)$ écrite en terme des sommes de puissances $x_i = \Sigma_{k \geq 1} t_k^i$. Rappelant (4) et (5) on obtient,

$$[X^n \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \ldots) = \sum_{\substack{s \in \widetilde{M}_t \\ \operatorname{stab}(s) = \{id\}}} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \cdots,$$

la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce moléculaire M. De la proposition 2,

$$\begin{aligned} L_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{M \in \mathscr{M}_n} f_M \Gamma_M(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &= \Gamma_{\Sigma_{n \geq 0} \Sigma f_M M}(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &= \Gamma_F(X_1, x_2, x_3, \ldots). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ce résultat donne lieu à l'expression suivante pour la série indicatrice d'asymétrie d'une espèce F:

$$\begin{aligned} &\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\ &\quad = \sum_{n \geq 0} \sum_{H \in \operatorname{cc}(\mathfrak{S}_n)} f_{X^n/H} \frac{1}{|H|} \sum_{V \leq H} \mu(\{id\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots . \end{aligned} \tag{9}$$

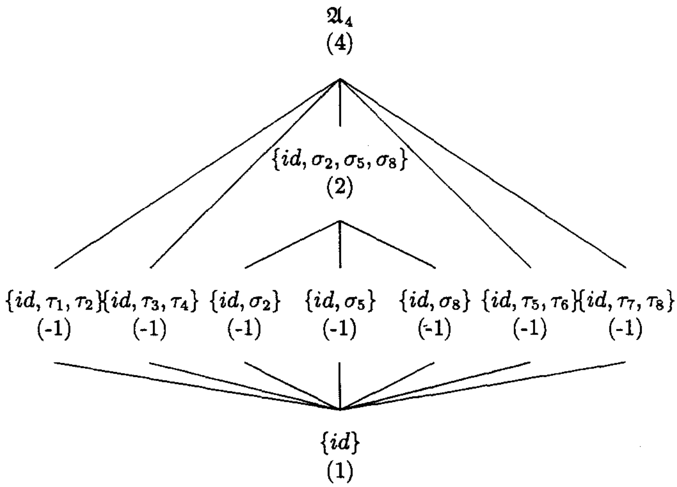

FIG. 1. Le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{U}_4$.

Exemple. Calculons la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce moléculaire $E_4^{\pm}$ qui est définie par le quotient $E_4^{\pm} = X^4/\mathfrak{U}_4$ où $\mathfrak{U}_4$ est le sous-groupe des permutations paires de $\mathfrak{S}_4$. Le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{U}_4$ est donné à la figure 1 où la valeur de la fonction de Möbius, pour chacun des éléments du treillis, est indiquée entre parenthèses. La notation utilisée à travers le texte pour les éléments de $\mathfrak{S}_4$ est celle de [1]: sous forme de mots, $id = 1234$, $\sigma_1 = 2341$, $\sigma_2 = 3412$, $\sigma_3 = 4123$, $\sigma_5 = 4321$, $\sigma_8 = 2143$, $\tau_1 = 1342$, $\tau_2 = 1423$, $\tau_3 = 3241$, $\tau_4 = 4213$, $\tau_5 = 2431$, $\tau_6 = 4132$, $\tau_7 = 2314$, $\tau_8 = 3124$, $\alpha_2 = 3214$ et $\alpha_5 = 1432$.

De la proposition 1 et du résumé fourni au tableau I,

$$\begin{aligned}
L_{E_4^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (X^4)_{E_4^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) \\
&= \frac{1}{12} \sum_{\{id\} \leq V \leq \mathfrak{U}_4} \mu(\{id\}, V)\, x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots \\
&= \frac{1}{12}\left\{x_1^4 - 3x_2^2 - 4x_1x_3 + 2x_4 + 4x_4\right\} \\
&= \frac{1}{12}\left\{x_1^4 - 3x_2^2 - 4x_1x_3 + 6x_4\right\},
\end{aligned}$$

qui est bien $\Gamma_{E_4^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de [5, 6].

TABLEAU I

Éléments de calculs pour $\Gamma_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \dots)$

V	$\mu(\{id\}, V)$	$x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \dots$
$\{id\}$	1	x_1^4
$\{id, \sigma_i\}$ $i = 2, 5, 8$	-1	x_2^2
$\{id, \tau_i, \tau_{i+1}\}$ $i = 1, 3, 5, 7$	-1	$x_1 x_3$
$\{id, \sigma_2, \sigma_5, \sigma_8\}$	2	x_4
$\mathfrak{U}_4$	4	x_4

4. Série indicatrice de cycles

Pour obtenir la série indicatrice de cycles d'une espèce F, voir (1), on doit faire la somme des poids de tous les types de F_t-structures. On peut très bien regrouper les termes de cette somme selon le stabilisateur des représentants de ces types. C'est ce qui est fait à la proposition suivante en utilisant la correspondance entre les classes de conjugaison des sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ et les espèces moléculaires concentrées sur la cardinalité n, [9].

Proposition 4. *Soit $G = \sum_{N \in \mathscr{M}} N$ l'espèce somme des espèces moléculaires avec multiplicité 1, $F = \sum_{M \in \mathscr{M}} f_M M$ une espèce et $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ sa série indicatrice de cycles, alors*

$$\Big(\sum_{N \in \mathscr{M}} N\Big)_F (x_1, x_2, x_3, \dots) = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Preuve. On a $(\sum_{N \in \mathscr{M}} N)_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{M \in \mathscr{M}} f_M \times ((\sum_{N \in \mathscr{M}} N)_M(x_1, x_2, x_3, \dots)$, où

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{N \in \mathscr{M}} N\Big)_M (x_1, x_2, x_3, \dots)\Big|_{x_i := \sum_{k \geq 1} t_k^i} &= \sum_{N \in \mathscr{M}} [N \downarrow M](t_1, t_2, t_3, \dots) \\ &= \sum_{s \in \widetilde{M},} t_1^{n_1(s)} t_2^{n_2(s)} t_3^{n_3(s)} \dots\end{aligned}$$

TABLEAU II

Éléments de calculs pour $Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, \ldots)$

N	$N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
$E_4^\pm$	x_4
$X \cdot C_3$	$x_1x_3 - x_4$
$E_2 \circ X^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
X^4	$\frac{1}{12}(x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4)$

est la série indicatrice de cycles de l'espèce moléculaire M. Ainsi,

$$\left(\sum_{N \in \mathscr{M}} N\right)_F (x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{M \in \mathscr{M}} f_M Z_M(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$= Z_{\Sigma f_M M}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$= Z_F(x_1, x_2, x_3, \ldots). \quad \blacksquare$$

Ceci suggère de désigner par Z l'espèce $\Sigma_{N \in \mathscr{M}} N$.

Exemple. La série indicatrice de cycles de l'espèce $E_4^\pm$ est

$$Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{N \in \mathscr{M}} N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$= \sum_{N \in \mathscr{M}_4} N_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \ldots), \tag{10}$$

où $\mathscr{M}_4 = \{E_4, E_4^\pm, P_4, X \cdot E_3, E_2 \cdot E_2, P_4^{bic}, C_4, X \cdot C_3, X^2 \cdot E_2, E_2 \circ X^2, X^4\}$. Le tableau II contient les N-séries indicatrices non nulles de l'espèce $E_4^\pm$. En effectuant la somme (10), on obtient

$$Z_{E_4^\pm}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \tfrac{1}{12}\left(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2\right).$$

5. Exemple et tableaux

Dans cette section nous illustrons le type de calculs à effectuer pour obtenir la N-série indicatrice d'une espèce M lorsque N et M sont des

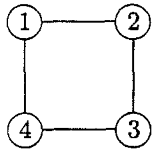

FIG. 2. Une P_4-structure sur [4].

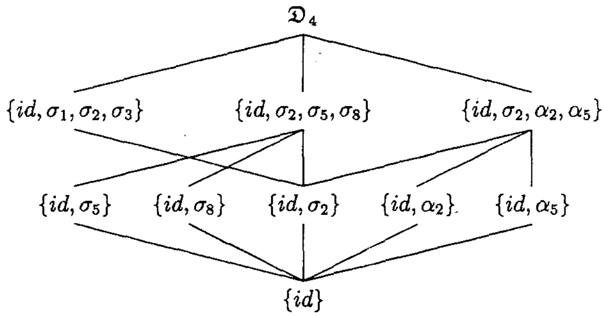

FIG. 3. Treillis des sous-groupes de $\mathfrak{D}_4$.

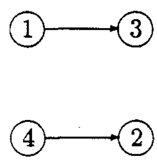

FIG. 4. Une $E_2 \circ X^2$-structure sur [4].

espèces moléculaires. Nous calculons la $E_2 \circ X^2$-série indicatrice de l'espèce P_4 des polygones sur 4 points, $E_2 \circ X^2$ étant l'espèce des paires de couples orientés.

Soit m la P_4-structure sur l'ensemble [4] illustrée à la figure 2. Le stabilisateur de m est $\mathrm{stab}(m) = \{id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_8, \alpha_2, \alpha_5\} = \mathfrak{D}_4$, le groupe diédral sur 4 points, dont le treillis des sous-groupes est illustré à la figure 3. Le stabilisateur de la $E_2 \circ X^2$-structure (figure 4) est $K = \{id, \sigma_5\}$ et sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$ est $\overline{K} = \{\{id, \sigma_i\} \mid i = 2, 5, 8\}$. Les sous-groupes $\{id, \sigma_2\}, \{id, \sigma_5\}, \{id, \sigma_8\}$ sont conjugués dans $\mathfrak{S}_4$ mais ne le sont pas dans $\mathfrak{D}_4$: $\overline{\{id, \sigma_2\}}^{\mathfrak{D}_4} = \{\{id, \sigma_2\}\}$ et $\overline{\{id, \sigma_5\}}^{\mathfrak{D}_4} = \{\{id, \sigma_5\}, \{id, \sigma_8\}\}$.

De la proposition 1,

$$\begin{aligned}
&(E_2 \circ X^2)_{P_4}(x_1, x_2, \dots) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{Q \in \{\{id, \sigma_i\} | i = 2,5,8\}} 2 \sum_{Q \le V \le \mathfrak{D}_4} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \\
&= \frac{2}{8} \sum_{\{id, \sigma_2\} \le V \le \mathfrak{D}_4} \mu(\{id, \sigma_2\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \\
&\quad + \frac{2 \cdot 2}{8} \sum_{\{id, \sigma_5\} \le V \le \mathfrak{D}_4} \mu(\{id, \sigma_5\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} \dots \\
&= \frac{1}{8}\big(2 \cdot 0 + 4(x_2^2 - x_4)\big) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_4).
\end{aligned}$$

Aux tableaux III, IV, V et VI apparaissent les différentes séries obtenues à partir des espèces moléculaires sur 4 points. En effectuant la somme des éléments d'une colonne on retrouve la série indicatrice de cycles (dernière ligne) et au-dessus, la série indicatrice d'asymétrie. De plus, les éléments de la diagonale ($N_N(x_1, x_2, \dots)$) reflètent le critère de réductibilité de Yeh [20] concernant les espèces moléculaires qui ne sont pas atomiques.

TABLEAU III

Séries de E_4 et de $E_4^{\pm}$

N_M	E_4	$E_4^{\pm}$
E_4	x_4	0
$E_4^{\pm}$	0	x_4
P_4	0	0
$X \cdot E_3$	$x_1x_3 - x_4$	0
$E_2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
P_4^{bic}	0	0
C_4	0	0
$X \cdot C_3$	0	$x_1x_3 - x_4$
$X^2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_4)$	0
$E_2 \circ X^2$	0	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
X^4	$\frac{1}{24}(x_1^4 - 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_4)$	$\frac{1}{12}(x_1^4 - 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 6x_4)$
Z_M	$\frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4)$	$\frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2)$

TABLEAU IV

Séries de P_4 et de $X \cdot E_3$

N_M	P_4	$X \cdot E_3$
E_4	0	0
$E_4^{\pm}$	0	0
P_4	x_4	0
$X \cdot E_3$	0	x_1x_3
$E_2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
P_4^{bic}	0	0
C_4	0	0
$X \cdot C_3$	0	0
$X^2 \cdot E_2$	$\frac{1}{2}(x_1^2x_2 - x_2^2)$	$x_1^2x_2 - x_1x_3$
$E_2 \circ X^2$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$	0
X^4	$\frac{1}{8}(x_1^4 - 2x_1^2x_2 - x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{6}(x_1^4 - 3x_1^2x_2 + 2x_1x_3)$
Z_M	$\frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{6}(x_1^4 + 3x_1^2x_2 + 2x_1x_3)$

Critère de réductibilité de Yeh. Soit T une espèce moléculaire concentrée sur la cardinalité n et $t \in T[n]$. S'il existe un ensemble $U \subseteq [n]$, $\varnothing \neq U \neq [n]$, tel que les conditions

(1) $\sigma \in \mathrm{stab}(t) \Rightarrow \forall u \in U, \sigma(u) \in U$ et $\forall u \in [n] \setminus U, \sigma(u) \in [n] \setminus U$

(2) $\sigma \in \mathrm{stab}(t) \Rightarrow \sigma|_U + 1_{[n]\setminus U} \in \mathrm{stab}(t)$

sont satisfaites, alors T est réductible sous le produit (i.e.: n'est pas atomique).

TABLEAU V

Séries de $E_2 \cdot E_2$, de P_4^{bic} et de C_4

N_M	$E_2 \cdot E_2$	P_4^{bic}	C_4
E_4	0	0	0
$E_4^{\pm}$	0	0	0
P_4	0	0	0
$X \cdot E_3$	0	0	0
$E_2 \cdot E_2$	x_2^2	0	0
P_4^{bic}	0	x_4	0
C_4	0	0	x_4
$X \cdot C_3$	0	0	0
$X^2 \cdot E_2$	$x_1^2x_2 - x_2^2$	0	0
$E_2 \circ X^2$	0	$\frac{3}{2}(x_2^2 - x_4)$	$\frac{1}{2}(x_2^2 - x_4)$
X^4	$\frac{1}{4}(x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - 3x_2^2 + 2x_4)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 - x_2^2)$
Z_M	$\frac{1}{4}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 + 3x_2^2)$	$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$

TABLEAU VI

Séries de $X \cdot C_3$, de $X^2 \cdot E_2$, de $E_2 \circ X^2$ et de X^4

N_M	$X \cdot C_3$	$X^2 \cdot E_2$	$E_2 \circ X^2$	X^4
E_4	0	0	0	0
$E_4^{\pm}$	0	0	0	0
P_4	0	0	0	0
$X \cdot E_3$	0	0	0	0
$E_2 \cdot E_2$	0	0	0	0
P_4^{bic}	0	0	0	0
C_4	0	0	0	0
$X \cdot C_3$	x_1x_3	0	0	0
$X^2 \cdot E_2$	0	$x_1^2x_2$	0	0
$E_2 \circ X^2$	0	0	x_2^2	0
X^4	$\frac{1}{3}(x_1^4 - x_1x_3)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 - x_1^2x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 - x_2^2)$	x_1^4
Z_M	$\frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1x_3)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 + x_1^2x_2)$	$\frac{1}{2}(x_1^4 + x_2^2)$	x_1^4

Pour une espèce moléculaire N, $N_N(x_1, x_2, x_3, \dots) \neq x_n$ si et seulement s'il existe un ensemble non vide $U \subset [n]$ qui satisfait la première condition du critère de Yeh. Une espèce atomique peut satisfaire la première condition du critère sans toutefois en satisfaire la deuxième, par exemple: prendre l'ensemble $U \in \{\{1,4\},\{2,3\}\}$ pour la $E_2 \circ X^2$-structure de la figure 4.

6. Espèces transitives

Soit $E = \sum_{n\geq 0} E_n = 1 + \sum_{n\geq 1} X^n/\mathfrak{S}_n$ l'espèce des ensembles, $C = \sum_{n\geq 1} C_n = \sum_{n\geq 1} X^n/\mathbb{Z}_n$ l'espèce des cycles où $\mathbb{Z}_n$ est le groupe cyclique d'ordre n et $P = \sum_{n\geq 1} P_n = \sum_{n\geq 1} X^n/\mathfrak{D}_n$ l'espèce des polygones où $\mathfrak{D}_n$ est le groupe diédral d'ordre $2n$. On dit qu'un groupe $K \leq \mathfrak{S}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est *transitif* s'il agit transitivement sur l'ensemble $[n]$. Visiblement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathfrak{D}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ sont transitifs. Une espèce sera dite *transitive* si elle s'écrit comme une somme de quotients où n'intervient que des groupes transitifs.

Proposition 5. *Si $G = \sum_{n\geq 0}\sum_{N\in\mathscr{M}_n} g_N N$ est une espèce transitive, alors la G-série indicatrice de toute espèce $F = \sum_{n\geq 0}\sum_{M\in\mathscr{M}_n} f_M M$ est*

$$G_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n\geq 0} \sum_{\substack{N\in\mathscr{M}_n \\ N \text{ transitive}}} g_N f_N x_n,$$

où par convention $x_0 = 1$.

Preuve. On a:

$$G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{N, M \in \mathscr{M}_n \\ N \text{ transitive}}} g_N f_M N_M(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

où, pour $N = X^n/K$ et $M = X^n/H$,

$$N_M(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{|H|} \sum_{Q \in \overline{K} \cap \operatorname{sg}(H)} |Q| \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots .$$

Puisque $\overline{K}$ est la classe de conjugaison de K dans $\mathfrak{S}_n$ et que K est transitif, tout groupe $Q \in \overline{K} \cap \operatorname{sg}(H)$ est aussi transitif. Ainsi,

$$\sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots = x_n \sum_{Q \leq V \leq H} \mu(Q, V) = \begin{cases} x_n & \text{si } Q = H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où,

$$(X^n/K)_{(X^n/H)}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \begin{cases} x_n & \text{si } \overline{H} = \overline{K}; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$N_M(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \begin{cases} x_n & \text{si } N = M, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le résultat suit. ∎

Nous avons résumé au tableau VII les différentes séries indicatrices obtenues à partir des espèces E, C et P. Rappellons que $\mathbb{Z}_i = \mathfrak{S}_i = \mathfrak{D}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ et que $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{D}_3$. Remarquer que pour $G, F \in \{E, C, P\}$ on a, $G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = F_G(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Ce phénomène est en fait un corollaire de la proposition 5 où F est aussi une espèce transitive.

COROLLAIRE 1. *Soit G et F deux espèces transitives, alors,*

$$G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = F_G(x_1, x_2, x_3, \ldots). \quad ∎$$

COROLLAIRE 2. *Soit $F = \sum_{M \in \mathscr{M}} f_M M$ une espèce transitive, alors,*

$$F_F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 0} \sum_{M \in \mathscr{M}_n} f_M^2 x_n. \quad ∎$$

Lorsque G est une espèce transitive, la G-série indicatrice de toute espèce F est linéaire en les x_n (proposition 5). Ceci n'est pas le cas

TABLEAU VII

$G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ pour $F = \sum_{M \in \mathscr{M}} f_M M$ et G transitive

G		$G_F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
$\sum_{N \in \mathscr{M}} g_N N$		$\sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{N \in \mathscr{M}_n \\ N \text{ transitive}}} g_N f_N x_n$
E	$\sum_{n \geq 0} f_{E_n} x_n$	$E_E(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 1 + \sum_{n \geq 1} x_n$ $E_C(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2$ $E_P(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2 + x_3$
C	$\sum_{n \geq 1} f_{C_n} x_n$	$C_E(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2$ $C_C(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 1} x_n$ $C_P(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2$
P	$\sum_{n \geq 1} f_{P_n} x_n$	$P_E(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2 + x_3$ $P_C(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + x_2$ $P_P(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 1} x_n$

lorsque G est une espèce quelconque et F est une espèce transitive. Considérons,

$$G = \sum_{n \geq 0} \sum_{K \in \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)} g_{X^n/K} X^n/K$$

une espèce quelconque, E l'espèce des ensembles et C l'espèce des cycles. La G-série indicatrice de l'espèce des ensembles est

$$G_E(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{K \in \mathrm{cc}(\mathfrak{S}_n)} g_{X^n/K} \frac{|K||\bar{K}|}{n!} \sum_{K \leq V \leq \mathfrak{S}_n} \mu(K, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots,$$

et celle des cycles est

$$G_C(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} g_{X^n/\mathbb{Z}_d} d \sum_{d|r|n} \mu\left(\frac{r}{d}\right) x_r^{n/r},$$

où $\mathbb{Z}_d = \langle (123 \cdots n)^{n/d} \rangle$désigne ici l'unique sous-groupe cyclique d'ordre d de $\mathbb{Z}_n = \langle (123 \cdots n) \rangle \leq \mathfrak{S}_n$, et $\mu(r/d)$ est la fonction de Möbius classique.

7. Conclusion

La présente étude offre plusieurs voies d'exploration.

• Il est possible d'obtenir des identités intéressantes entre les valeurs de la fonction de Möbius lorsque l'on possède une expression explicite pour les coefficients d'une série indicatrice (calculée indépendamment de l'inversion de Möbius). Illustrons ce fait en faisant appel à l'espèce $E_n = X^n/\mathfrak{S}_n$ des ensembles de cardinalité n et l'espèce $E_n^{\pm} = X^n/\mathfrak{U}_n$ des ensembles orientés de cardinalité n.

On sait d'une par (voir [5]) que la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce E_n est

$$\Gamma_{E_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{\sigma \vdash n} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots}{\operatorname{aut}(\sigma)}, \tag{11}$$

où σ parcourt les partages de l'entier n, $\operatorname{sgn}(\sigma) =$ *signe de* $\sigma = (-1)^{n-\Sigma\sigma_i} = (-1)^{\Sigma\sigma_{2k}}$ et $\operatorname{aut}(\sigma) = 1^{\sigma_1}\sigma_1! 2^{\sigma_2}\sigma_2! \ldots$.

D'autre part, en posant $F = E_n = X^n/\mathfrak{S}_n$ dans (9), on obtient une deuxième expression pour cette série,

$$\Gamma_{E_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{n!} \sum_{\{id\} \leq V \leq \mathfrak{S}_n} \mu(\{id\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots. \tag{12}$$

En isolant le coefficient de x_n^1 dans (11) et dans (12) on obtient un résultat bien connu (voir [16] p. 166) concernant les valeurs de la fonction de Möbius dans le treillis des sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$:

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id\}, V) = (-1)^{n-1}(n-1)!. \tag{13}$$

Une étude plus raffinée, basée sur la formule (5.6) de [5], montre que la série indicatrice d'asymétrie de l'espèce $E_n^{\pm}$ est

$$\Gamma_{E_n^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum_{\sigma \vdash n} (2 + \sigma_1 - n) \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \ldots}{\operatorname{aut}(\sigma)}, \qquad n \geq 2. \tag{14}$$

D'autre part, en posant $F = E_n^{\pm} = X^n/\mathfrak{U}_n$ dans (9) on obtient,

$$\Gamma_{E_n^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{2}{n!} \sum_{V \leq \mathfrak{S}_n} \mu(\{id\}, V) x_1^{V_1} x_2^{V_2} x_3^{V_3} \ldots.$$

Regroupons les éléments de cette somme selon les partages de n obtenus par l'action naturelle de V sur $[n]$,

$$\Gamma_{E_n^{\pm}}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \frac{2}{n!} \sum_{\sigma \vdash n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3} \dots \sum_{\substack{V \text{ de type } \sigma \\ V \leq \mathfrak{U}_n}} \mu(\{id\}, V). \quad (15)$$

En comparant les expressions obtenues de (14) et de (15) par restriction au partage $\sigma = n^1$ on obtient,

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{U}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id\}, V) = (-1)^{n-1}\left(1 - \frac{n}{2}\right)(n-1)!, \qquad n \geq 2, \quad (16)$$

une expression analogue à (13) pour les groupe $\mathfrak{U}_n$.

Un résultat intéressant apparaît lorsqu'on soustrait (16) de (13):

$$\sum_{\substack{V \leq \mathfrak{S}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id\}, V) - \sum_{\substack{V \leq \mathfrak{U}_n \\ V \text{ transitif}}} \mu(\{id\}, V) = (-1)^{n-1} \frac{n!}{2}, \qquad n \geq 2.$$

Ce coefficient est conjecturé (dans [16], p. 166 exercice 53c) comme la valeur de la fonction de Möbius du groupe symétrique.

• La proposition 1 et la définition 2 permettent de faire abstraction des variables t_i, $i \geq 1$, introduites au départ. Ainsi, la généralisation de la définition 2 au contexte des espèces pondérées s'avère simple et tout à fait naturelle.

• On sait que les transformations $F \mapsto Z_F$ et $F \mapsto \Gamma_F$ commutent aux opérations combinatoires usuelles somme, produit, substitution et dérivation. On doit maintenant s'interroger sur les propriétés de la transformation $F \mapsto G_F$ lorsque G est une espèce quelconque.

• Dans [3], Décoste présente la substitution $x_i = (1-q)^i x^i/(1-q^i)$ qui, lorsqu'elle est effectuée dans la série indicatrice de cycles d'une espèce F, donne lieu à un q-analogue de la série génératrice de cette dernière. En effectuant cette même substitution dans la G-série indicatrice d'une espèce F, plusieurs identités intéressantes sont obtenues. Celles-ci feront l'objet de travaux ultérieurs.

Références

1. B. Baumslag et B. Chandler, "Theory and Problems of Group Theory," Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1968.
2. N. G. De Bruijn, Pólya theory of counting, *in* Applied Combinatorial Mathematics (E. F. Beckenbach, Ed.), Krieger, Melbourne, FL, 1964.

3. H. DÉCOSTE, Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analoques," Thèse de Ph.D., U. de Montréal et UQAM, 1989 Publication du LACIM no. 2, 1990.
4. A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. Math.* **42** (1981) 1–82.
5. G. LABELLE, On Asymmetric Structures, *Discrete Math.* **99** (1992), 141–164.
6. G. LABELLE, "Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires," Séries formelles et combinatoire algébrique, Actes de Colloque (M. Delest, G. Jacob et P. Leroux: éditeurs), Bordeaux 2–4 mai, 1991, pp. 3–19.
7. J. LABELLE, Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures, *Ann. Sci. Math. Québec* **7**, no 1, 1983, pp. 59–94.
8. J. LABELLE, Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité, *Ann. Sci. Math. Québec* **9** (1) (1985), 31–58.
9. J. LABELLE, ET Y.-N. YEH, The relation between burnside rings and combinatorial species, *J. Combin. Theory Ser A* **50** (1989), 269–284.
10. A. KERBER, "Algebraic Combinatorics via Finite Group Action," Wissenschaftsverlag, 1991.
11. A. KERBER, "Enumeration under Finite Group Action: Symmetry Classes of Mappings," Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1985, pp. 160–176.
12. G.-C. ROTA, On the foundations of combinatorial theory. I: Theory of Möbius functions, *Z. Wahrsh. Verw. Gebiete* **2** (1964) 340–368.
13. G.-C. ROTA, Baxter algebras and combinatorial identities, II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 330–334.
14. G.-C. ROTA ET B. E. SAGAN, Congruences derived from group action, *European J. Combin.* **1** (1980) 67–76.
15. G.-C. ROTA ET D. A. SMITH, Enumeration under group action, Annali Scuola Normale Superiore-Pisa, Classe di Scienze, Série IV, Vol. IV, no 4, 1977, pp. 637–646.
16. R. STANLEY, "Enumerative Combinatorics," Vol. 1, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, Mathematics Series, 1986.
17. P. K. STOCKMEYER, "Enumeration of Graphs with Prescribed Automorphism Group," Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1971.
18. D. WHITE, Counting patterns with a given automorphism group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **47** (1) (1975), 41–44.
19. J. S. YANG "Symmetric Functions, Plethysm, and Enumeration," Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1991.
20. Y.-N. YEH, "The Calculus of Virtual Species and K-species," Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1985, pp. 351–369.